【サンプル】

新基礎コース微分積分

学術図書出版社

オリジナル解答解説集

◇◇第 6 章―問 6.1～問 6.14◇◇

◇お願い
・記述に誤りがあったり，何かご不明な点がありましたらお気軽に answerlabo@gmail.com までご連絡ください。

◇目次（クリックすると飛びます）

問 6.1　次の 2 重積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$， $D = \left\{(x,y)|1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (1 + x + 2y)dxdy$， $D = \left\{(x,y)|1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2\right\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \sin(x + y)\,dxdy$， $D = \left\{(x,y)|0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$

(4) $\displaystyle\iint_D x^3 y dxdy$， $D = \left\{(x,y)|0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\right\}$

(5) $\displaystyle\iint_D \sin(x + y)\,dxdy$， $D = \left\{(x,y)|1 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi - x\right\}$

解

(1)

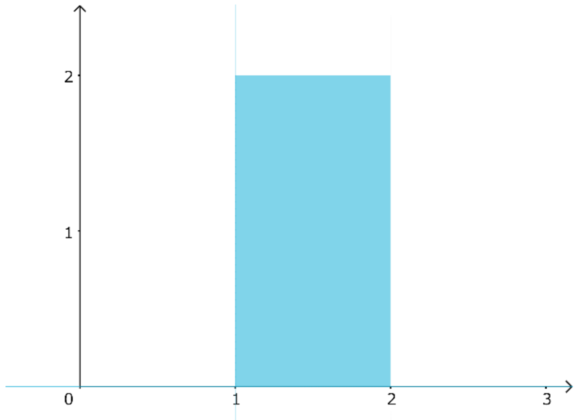
$$\int_1^2 \left(\int_0^2 \frac{1}{2}xy\,dy\right) dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=2} dx$$

$$= \int_1^2 2x dx$$

$$= [x^2]_1^2$$

$$= 3$$

重積分の時は，変数が x 以外に y , z なども加わり，どの変数に代入すればよいか混同するのを避けるため，慣れるまでは「$[\ \ ]_{y=0}^{y=2}$」などと表記するのが良い。



(2)

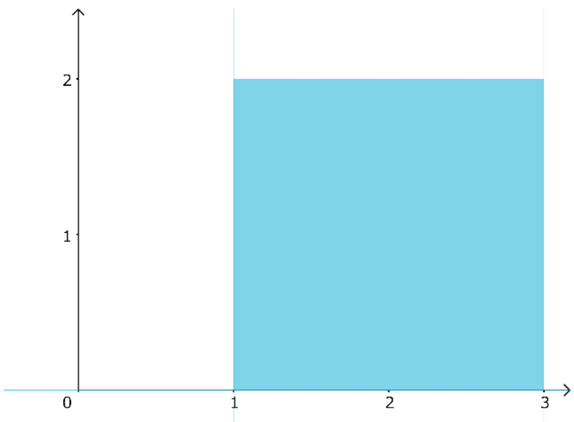
$$\int_1^3 \left(\int_0^2 (1 + x + 2y)\,dy\right) dx = \int_1^3 [(1 + x)y + y^2]_{y=0}^{y=2}\,dx$$

$$= \int_1^3 (2(1 + x) + 4)\,dx$$

$$= \int_1^3 (2x + 6)\,dx$$

$$= [x^2 + 6x]_1^3$$

$$= 20$$



(3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\,dy\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left([-\cos(x+y)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}}\right)dx$$

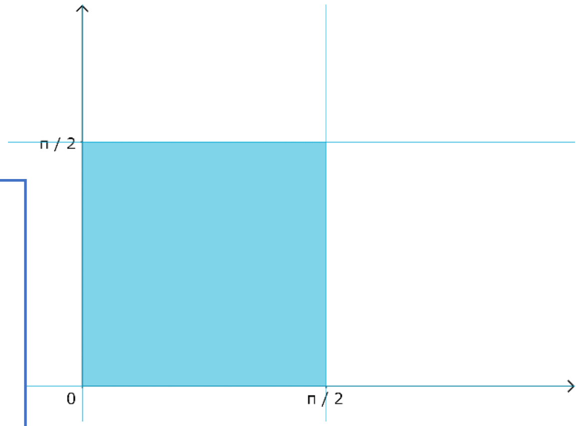
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)dx$$

$$=\left[\sin x-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=1+1$$

$$=2$$

「 $[-x]_1^2$ 」のように被積分関数の先頭に「−」が付いているときは，代入する順番を逆にする（下端から上端の順に代入する）とよい。



(4)

$$\int_0^1\left(\int_x^1 x^3y\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\left[\frac{1}{2}x^3y^2\right]_{y=x}^{y=1}\right)dx$$

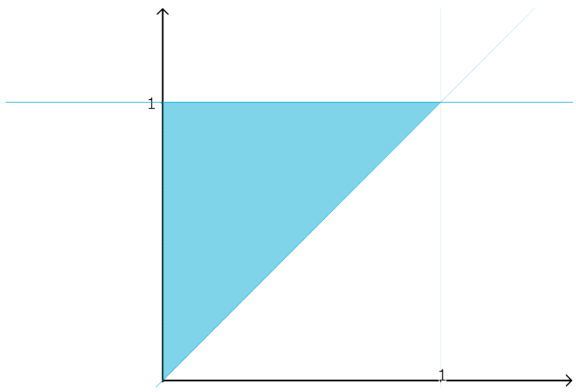
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^3(1-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^3-x^5)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^6\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{24}$$



(5)

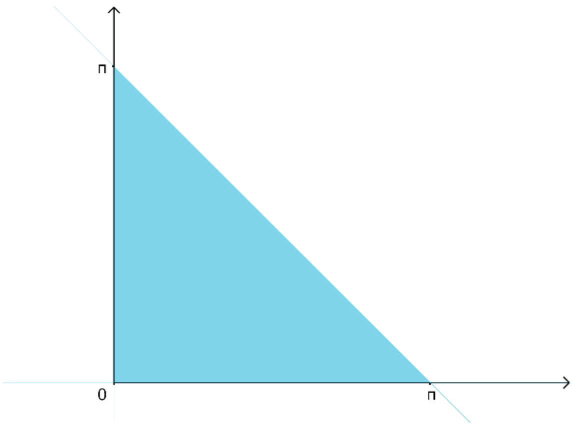
$$\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi-x}\sin(x+y)\,dy\right)dx=\int_0^{\pi}\left([-\cos(x+y)]_{y=0}^{y=\pi-x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi}(\cos x-\cos\pi)dx$$

$$=\int_0^{\pi}(\cos x+1)dx$$

$$=[\sin x+x]_0^{\pi}$$

$$=\pi$$



問 6.2　次に問いの閉領域 D を図示し，2 重積分の値を計算せよ。

(1) $\iint_D (x+y)\,dxdy$，$D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$

(2) $\iint_D \sqrt{y-x}\,dxdy$，$D=\left\{(x,y)\middle|x+y\leq 1,\ y\geq x\geq 0\right\}$

(3) $\iint_D \log\frac{x}{y}\,dxdy$，$D=\{(x,y)|1\leq y\leq x\leq e\}$

(4) $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$，Dは 3 直線 $y=x$，$y=2x$，$x=1$ で囲まれた部分

(5) $\iint_D \frac{y}{1+x^2}dxdy$，$D$は直線 $y=x$ と放物線 $y^2=x$ で囲まれた部分

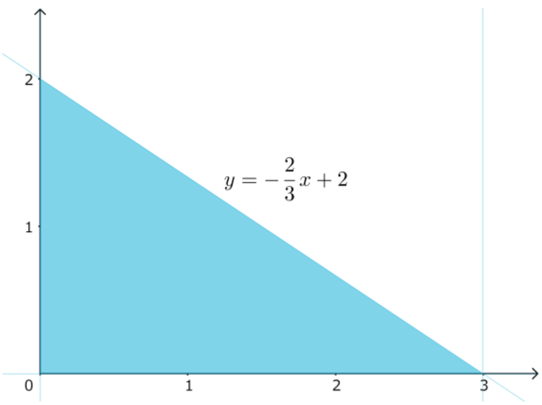
解

問 6.1 との違いは，「 ≤x≤, ≤y≤ 」の形になっていないという点である。よって，問 6.1 と同様，「 ≤ x ≤, ≤ y ≤ 」の形に変形する。そのためには，閉領域 D をきちんと図示し，可視化する必要がある。

(1)

$$D=\left\{(x,y)\middle|y\leq -\frac{2}{3}x+2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$$

この閉領域 D を図示してみると，以下のようになる。



書き直すと，以下のようになる。

$$D=\left\{(x,y)\middle|0\leq x\leq 3,\ 0\leq y\leq -\frac{2}{3}x+2\right\}$$

ここからは，問 6.1 と同様に計算すればよい。

$$\int_0^3\left(\int_0^{-\frac{2}{3}x+2}(x+y)\,dy\right)dx=\int_0^3\left(\int_0^{\frac{2}{3}(3-x)}(x+y)\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^3\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_0^{y=\frac{2}{3}(3-x)}dx$$

$$=\int_0^3\left(\frac{2}{3}x(3-x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}(3-x)^2\right)dx$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^3[3x(3-x)+(3-x)^2]dx$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^3(-2x^2+3x+9)dx$$

$$=\frac{2}{9}\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right]_0^3$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{45}{2}$$

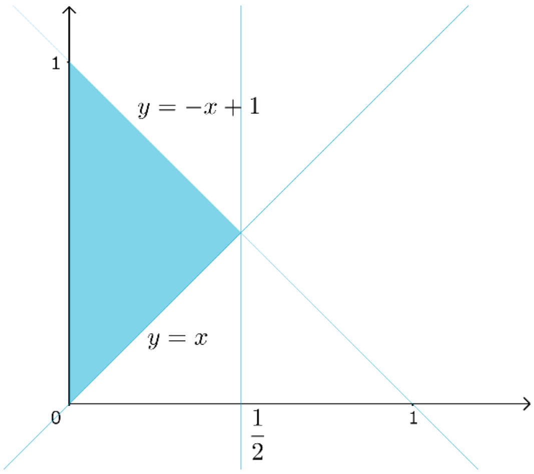
$$=5$$

> $$-\frac{2}{3}x+2$$
>
> のように代入する部分に分数がある場合は，
>
> $$\frac{2}{3}(3-x)$$
>
> のように，くくると後から計算が楽になる。

(2)

$$D=\left\{(x,y)|y\le -x+1,\ \ y\ge x\ge 0\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le\frac{1}{2},\ \ x\le y\le -x+1\right\}$$



$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_x^{1-x}\sqrt{y-x}dy\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}\left[(y-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{y=x}^{y=1-x}dx$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)(1-2x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

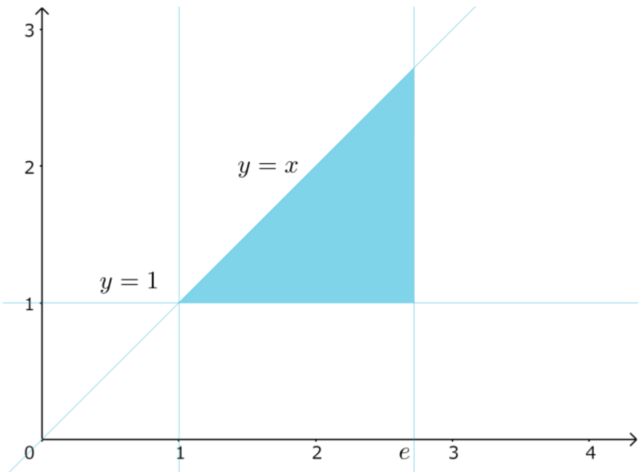
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2}{15}$$

(3)

$D = \{(x,y) | 1 \le y \le x \le e\}$

$= \left\{(x,y) \middle| 1 \le x \le e,\ \ 1 \le y \le x\right\}$



$$\int_1^e \left(\int_1^x \log \frac{x}{y} dy \right) dx = \int_1^e \left(\int_1^x (\log x - \log y) dy \right) dx$$

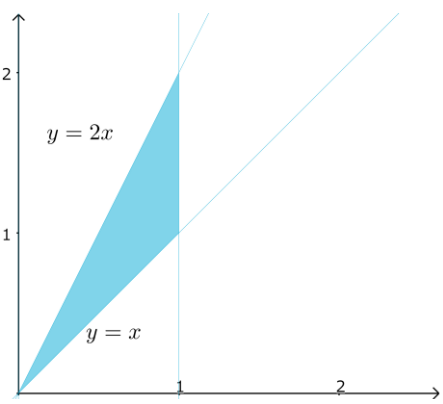
$$= \int_1^e [y \log x - (y \log y - y)]_{y=1}^{y=x} dx$$

$$= \int_1^e (x - \log x - 1)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - (x \log x - x) - x\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2}$$

(4)



図より，

$D=\left\{(x,y)\middle|0\leq x\leq 1,\ \ x\leq y\leq 2x\right\}$

$\int_0^1\left(\int_x^{2x}(x^2+y^2)\,dy\right)dx=\int_0^1\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=x}^{y=2x}dx$

$=\int_0^1\left(2x^3+\frac{1}{3}\cdot 8x^3-x^3-\frac{1}{3}x^3\right)dx$

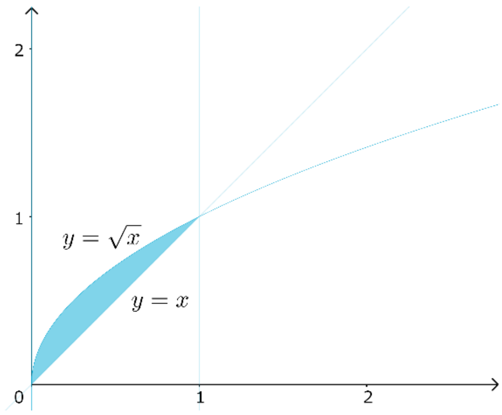
$=\int_0^1\frac{10}{3}x^3\,dx$

$=\frac{10}{3}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$

$=\frac{5}{6}$

(5)

$y^2=x\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{x}$ であるが，共通部分となるのは，$y=+\sqrt{x}$ の方であるから，



$D=\left\{(x,y)\middle|0\leq x\leq 1,\ \ x\leq y\leq \sqrt{x}\right\}$

となる。

$\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}}\frac{y}{1+x^2}dy\right)dx$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=x}^{y=\sqrt{x}}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x-x^2}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{x}{1+x^2}-\frac{x^2}{1+x^2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{x}{1+x^2}-\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}-1\right)dx$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)+Arc\sin x-x\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\log 2+\frac{\pi}{4}-1\right)$

問 6.3　次の類似積分の積分順序を交換せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (f(x,y)dy)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x}^{\sqrt{x}} (f(x,y)\,dy)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (f(x,y)\,dx)dy$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x}^{2x} (f(x,y)\,dy)dx$

解

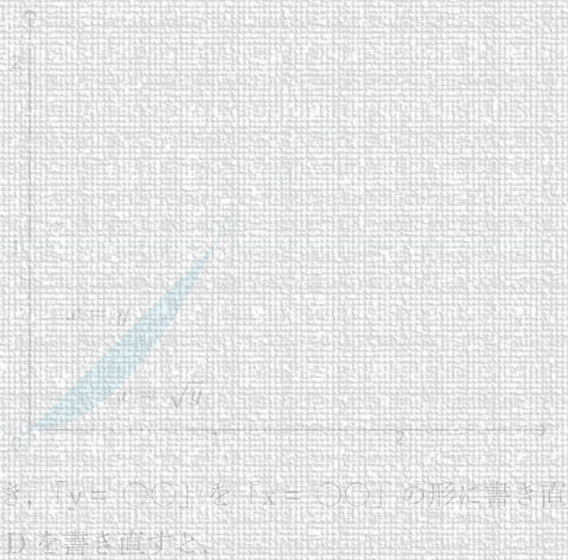
積分順序を交換する問題は，必ず図示するようにしましょう。その名の通り，x と y の役割を逆転させるイメージです。

(1)

まずは積分範囲から，閉領域 D を記してみる。

$D = \left\{0 \le x \le 1,\ \ x^2 \le y \le x\right\}$

これを図示してみると，



このとき，「y = ○○」を「x = ○○」の形に書き直す。

閉領域 D を書き直すと，

$D = \left\{(x,y) | 0 \le y \le 1,\ \ y \le x \le \sqrt{y}\right\}$

$y \le x \le \sqrt{y}$ か $\sqrt{y} \le x \le y$ かで迷う場合は，グラフ中でより右にある関数が不等式の右に来る，と考えればよい。

よって，

$$\int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \right) dy$$

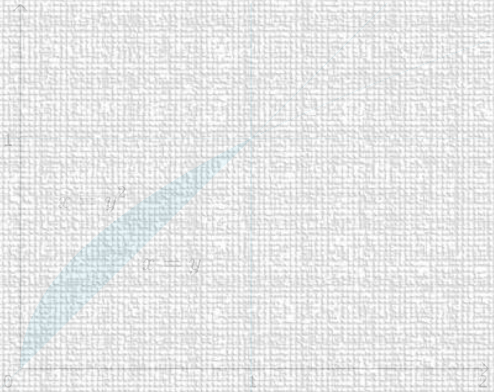
(2)

$$D = \left\{ (x,y) \middle| 0 \leq x \leq 1,\ \ x \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \middle| 0 \leq y \leq 1,\ \ y^2 \leq x \leq y \right\}$$

よって，

$$\int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} f(x,y)\,dx \right) dy$$



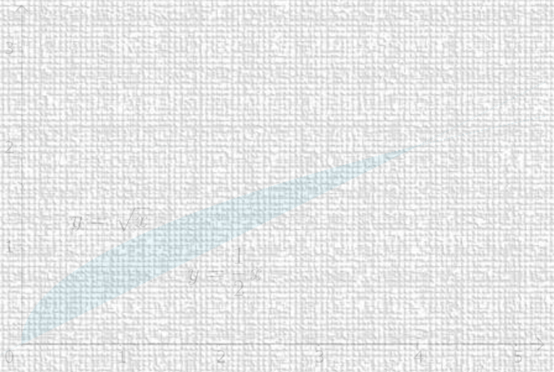
(3)

$$D = \left\{ (x,y) \middle| 0 \leq y \leq 2,\ \ y^2 \leq x \leq 2y \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \middle| 0 \leq x \leq 4,\ \ \frac{1}{2}x \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$$

よって，

$$\int_0^4 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dx \right) dy$$



(4)

$$D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,\ \ x\le y\le 2x\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le 1,\ \ \frac{1}{2}y\le x\le y\right\}+\left\{(x,y)\middle|1\le y\le 2,\ \ \frac{1}{2}y\le x\le 1\right\}$$

よって，

$$\int_0^1\left(\int_{\frac{1}{2}y}^{y} f(x,y)\,dx\right)dy+\int_1^2\left(\int_{\frac{1}{2}y}^{1} f(x,y)\,dx\right)dy$$

今回の領域は，途中で区切れるところが存在する（赤線）。
そのため，閉領域が一発で書けない（和の形で表される）。

問 6.4　次の 2 重積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_x^1\sqrt{1-y^2}\,dy\right)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^x \sin x\sin^3 y\,dy\right)dx$

解

2 通りの方法で解答する。積分順序を交換した場合の方が計算が簡単になる場合があるため，積分順序を交換できることは有利である。それをこの問題を通じて実感するとよい！

(1)

解法 1

$$\int_0^1\left(\int_x^1\sqrt{1-y^2}\,dy\right)dx=\int_0^1\frac{1}{2}\left[y\sqrt{1-y^2}+Arc\sin y\right]_{y=x}^{y=1}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\pi}{2}-x\sqrt{1-x^2}-Arc\sin x\right)dx \qquad (\$)$$

まずこの積分覚えていますか？知っていたとしても，次に $Arc\sin x$ の積分などが来てややこしい！ということをこの時点で気づけたらいいですね。気づけたら，すぐに積分順序の交換に移りましょう。

ここで，

■ $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

■ $\displaystyle\int_0^1 Arc\sin x\,dx=[x\cdot Arc\sin x]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$=\frac{\pi}{2}-\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

これらを ($) に代入して，

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^1\frac{\pi}{2}dx-\frac{1}{3}-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{3}$$

以下の積分はよく出てくるので公式化して覚えておきましょう！（置換積分でも解けるが，時間切れになる可能性大）

■ $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{1-x^2}+C$

■ $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

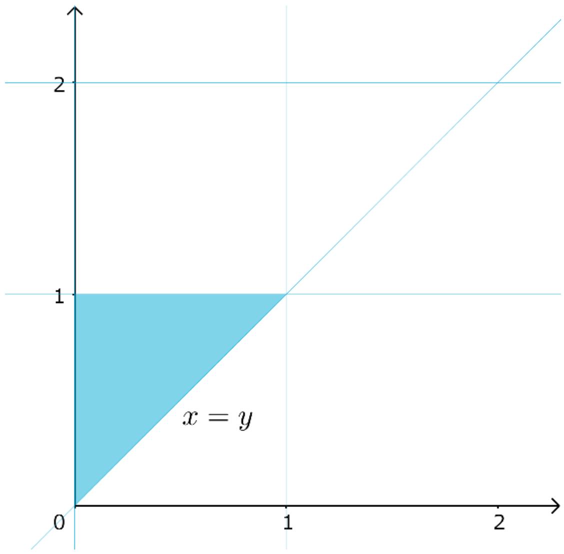
■ $\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+Arc\sin x\right)+C$

解法 2

まず，積分順序を交換するために，閉領域 D を図示する。

$D=\left\{(x,y)|0\le x\le 1,\ \ x\le y\le 1\right\}$

$=\{(x,y)|0\le y\le 1,\ \ 0\le x\le y\}$



よって，

$$\int_0^1\left(\int_x^1\sqrt{1-y^2}\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^y\sqrt{1-y^2}\,dx\right)dy$$

$$=\int_0^1\left[x\sqrt{1-y^2}\right]_{x-0}^{x=y}dy$$

$$=\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}(1-y^3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}$$

解法 1 と解法 2 では解答スピードが断然異なります。

(2)

解法 1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^x\sin x\sin^3 y\,dy\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\left(\int_0^x\sin^3 y\,dy\right)dx \qquad (\$)$$

ここで，

$$\int_0^x\sin^3 y\,dy=\int_0^x\sin y\cdot\sin^2 y\,dy=\int_0^x\sin y\cdot(1-\cos^2 y)\,dy$$

$$=\int_0^x(\sin y-\sin y\cos^2 y)\,dy$$

$$=\left[-\cos y+\frac{1}{3}\cos^3 y\right]_0^x$$

$$=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+1-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2}{3}-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$$

$\sin^3 x$ とか$\sin^5 x$ とか $\cos^3 x$ とか $\cos^5 x$ など指数が奇数の場合の積分はよく出る。積分の仕方は，まず$\sin x$，$\cos x$ の単体を取り出し，残りの部分を$(1-\cos^2 x)$や$(1-\sin^2 x)$に変形し，計算を進める。

であるから，

$$(\$) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3}\sin x - \cos x \sin x + \frac{1}{3}\sin x \cos^3 x\right) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cos^4 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

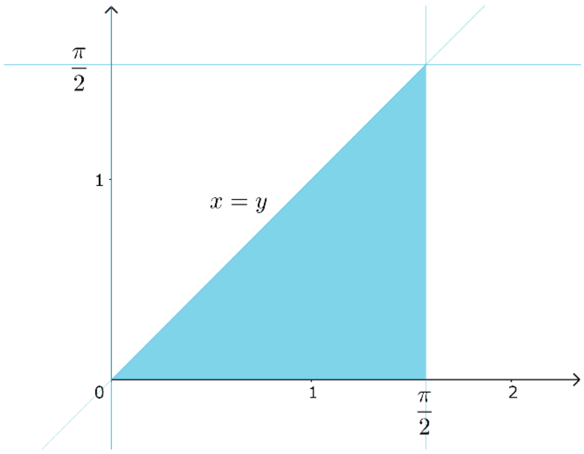
$$= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{4}$$

解法 2

$$D = \left\{(x, y) | 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ \ 0 \le y \le x\right\}$$

$$= \left\{(x, y) | 0 \le y \le \frac{\pi}{2},\ \ y \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$$



よって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^x \sin x \sin^3 y \, dy\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 y \left(\int_y^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx\right) dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 y \, [-\cos x]_y^{\frac{\pi}{2}} \, dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \sin^3 y \, dy$$

$$= \left[\frac{1}{4}\sin^4 y\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

問 6.5　例題 6.5 と同様に，適当な 1 次変換を行うことによって，次の 2 重積分の値を計算せよ。

(1) $\iint_D 3x\,dxdy$，$\left\{(x,y) \middle| 0 \leq x-y \leq 1，0 \leq x+2y \leq 1\right\}$

(2) $\iint_D (x+y)\,dxdy$，$\left\{(x,y) \middle| 0 \leq x+y \leq 1，|x-y| \leq 1\right\}$

(3) $\iint_D (x-y)\sin(x+y)\,dxdy$，$\left\{(x,y) \middle| 0 \leq x-y \leq \pi，0 \leq x+y \leq \pi\right\}$

解

(1)

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + 2y \end{cases}$$

とおくと，$xy-$平面の閉領域 D → $uv-$平面の閉領域 E を新たに定義すると，

$$E = \left\{(u,v) \middle| 0 \leq u \leq 1，0 \leq v \leq 1\right\}$$

となる。

また，

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(2u+v) \\ y = \dfrac{1}{3}(-u+v) \end{cases}$$

であるから，ヤコビアンJは

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

よって，

$$\iint_D 3x\,dxdy = \iint_E (2u+v)\cdot\frac{1}{3}dudv = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\int_0^1 (2u+v)\,dv\right)du$$

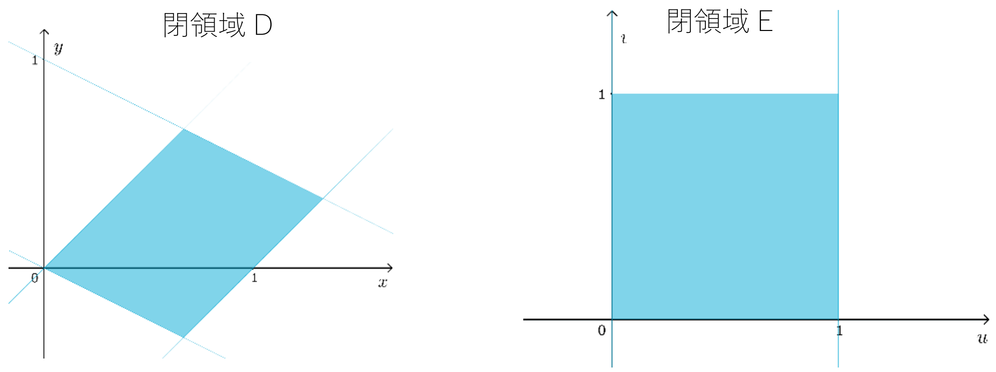
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left[2uv + \frac{1}{2}v^2\right]_0^1 du$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(2u + \frac{1}{2}\right)du$$

$$= \frac{1}{3}\left[u^2 + \frac{1}{2}u\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$



上記のどちらの閉領域の方が積分しやすいですか？もちろん，右の閉領域です。このように閉領域 D から閉領域 E に変換することで，一気に簡単な領域に変身します。変換した際にヤコビアンだけは忘れないようにしましょう。このような変換は，閉領域が x と y の和の形で表されている場合が多いことがポイントです。

(2)

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

とおくと，$xy-$平面の閉領域 D $\rightarrow$ $uv-$平面の閉領域 E を新たに定義すると，

$$E = \left\{(u, v) | 0 \leq u \leq 1,\ \ -1 \leq v \leq 1\right\}$$

となる。

また，

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u + v) \\ y = \frac{1}{2}(u - v) \end{cases}$$

であるから，ヤコビアンJ は

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

よって，

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \iint_E u \cdot \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 u\,dv\right) du = \frac{1}{2}\int_0^1 [uv]_{v=-1}^{v=1}\,du$$

ヤコビアンを代入するときは必ず絶対値をとることに注意しましょう。

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 2u\,du$$

$$= \frac{1}{2}[u^2]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

(3)

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

とおくと，$xy-$平面の閉領域 D $\rightarrow$ $uv-$平面の閉領域 E を新たに定義すると，

$$E = \left\{(u,v) \middle| 0 \le u \le \pi,\ \ 0 \le v \le \pi\right\}$$

となる。

また，

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(u+v) \\ y = \dfrac{1}{2}(-u+v) \end{cases}$$

であるから，ヤコビアンJは

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

よって，

$$\iint_D (x-y)\sin(x+y)\,dxdy = \iint_E u\sin v \cdot \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2}\int_0^\pi u\left(\int_0^\pi \sin v\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi u[-\cos v]_0^\pi\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi 2u\,du$$

$$= \frac{1}{2}[u^2]_0^\pi$$

$$= \frac{\pi^2}{2}$$

問 6.6　以下を計算せよ。

$$\iint_D (x^2-y^2)e^{-x-y}\,dxdy,\ D=\left\{(x,y)|0\le x+y\le 1,\ 0\le x-y\le 1\right\}$$

解

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$$

とおくと，

$$E=\left\{(u,v)|0\le u\le 1,\ 0\le v\le 1\right\}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(u+v) \\ y=\dfrac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

以上から，

$$\iint_D (x^2-y^2)e^{-x-y}\,dxdy=\iint_D (x+y)(x-y)e^{-(x+y)}\,dxdy=\iint_E uv\cdot e^{-u}\,dudv$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^1 uv\cdot e^{-u}\,dv\right)du$$

$$=\int_0^1 ue^{-u}\left[\frac{1}{2}v^2\right]_0^1 du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 ue^{-u}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\left([-ue^{-u}]_0^1+\int_0^1 e^{-u}\,du\right)$$

$$=\frac{1}{2}(-e^{-1}+[-e^{-u}]_0^1)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

問 6.7　以下を計算せよ。ただし，$x+y=u$，$x-y=v$ とおけ。

$$\iint_D e^{-(x+y)^2}\,dxdy,\quad D=\left\{(x,y)|0\le x+y\le a,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\},\quad a>0$$

解

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$$

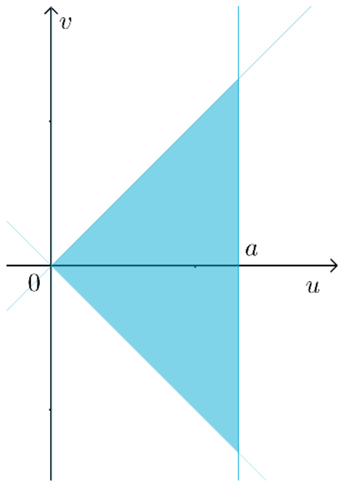
とおくと，

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(u+v)\ge 0 \\ y=\dfrac{1}{2}(u-v)\ge 0 \end{cases}$$

より，

$$E=\left\{(u,v)|u+v\ge 0,\ u-v\ge 0\right\}$$

これを図示すると，右図のようになる。
E を書き直すと，



$$E=\left\{(u,v)|0\le u\le a,\ \ -u\le v\le u\right\}$$

$$J=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

以上から，

$$\iint_D e^{-(x+y)^2}\,dxdy=\iint_E e^{-u^2}\cdot\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{2}\int_0^a\left(\int_{-u}^{u}e^{-u^2}\,dv\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a\left[ve^{-u^2}\right]_{-u}^{u}du$$

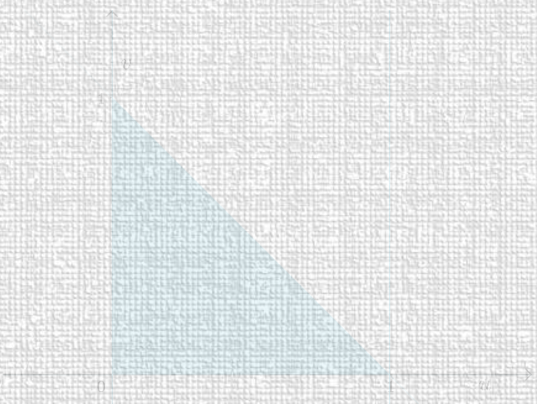
$$=\int_0^a ue^{-u^2}\,du$$

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-u^2}\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-e^{-a^2}\right)$$

問 6.8　以下を計算せよ。ただし，$x = u^2(u \geq 0)$，$y = v^2(v \geq 0)$ とおけ。

$$\iint_D y\,dxdy,\quad D = \left\{(x,y)\middle|\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0\right\}$$



解

$$\begin{cases} x = u^2 \\ y = v^2 \end{cases}$$

とおくと，$u \geq 0$，$v \geq 0$ より，

$$\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ v = \sqrt{y} \end{cases}$$

$$E = \left\{(u,v)\middle|u + v \leq 1,\ \ u \geq 0,\ \ v \geq 0\right\} = \left\{(u,v)\middle|0 \leq u \leq 1,\ \ 0 \leq v \leq -u + 1\right\}$$

$$J = \begin{vmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2v \end{vmatrix} = 4uv$$

以上から，

$$\iint_D y\,dxdy = \iint_E v^2 \cdot 4uv\,dudv = 4\iint_E uv^3\,dudv$$

$$= 4\int_0^1 \left(\int_0^{-u+1} uv^3\,dv\right) du$$

$$= 4\int_0^1 \left[\frac{1}{4}uv^4\right]_0^{1-u} du$$

$$= \int_0^1 u(1-u)^4\,du$$

ここは，置換！多項式が何乗にもなっている場合は必ず置換する癖をつけましょう。

$t = 1 - u$ とおくと，$dt = -du$

$$\int_0^1 u(1-u)^4\,du = \int_1^0 (1-t)t^4(-dt) = \int_0^1 (t^4 - t^5)dt = \left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{6}t^6\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{30}$$

問 6.9　次の 2 重積分の値を計算せよ。

(1) $\iint_D x^2\,dxdy,\ \ D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1,\ \ x\geq 0\}$

(2) $\iint_D \sqrt{16-x^2-y^2}\,dxdy,\ \ D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 16,\ \ x\geq 0,\ \ y\geq 0\}$

(3) $\iint_D (2x^2+3y^2)\,dxdy,\ \ D=\{(x,y)|1\leq x^2+y^2\leq 9\}$

(4) $\iint_D xye^{-(x^2+y^2)}\,dxdy,\ \ D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1,\ \ x\geq 0,\ \ y\geq 0\}$

(5) $\iint_D 3y\,dxdy,\ \ D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2x,\ \ y\geq 0\}$

解

(1)

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

と極座標変換すると，

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r$$

$r\theta-$平面における極座標のヤコビアンは r だということは覚えておきましょう。

$$E=\left\{(r,\theta)|0\leq r^2\leq 1,\ \ r\cos\theta\geq 0\right\}=\left\{(r,\theta)\middle|0\leq r\leq 1,\ \ -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$

であるから，

$$\iint_D x^2\,dxdy=\iint_E r^2\cos^2\theta\cdot r\,drd\theta=\iint_E r^3\cos^2\theta\,drd\theta=\int_0^1 r^3\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\right)dr$$

$$=\int_0^1 r^3\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 r^3$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\frac{\pi}{8}$$

(2)

極座標変換すると，

$$E=\left\{(r,\theta)\middle|0\leq r^2\leq 16,\ \ r\cos\theta\geq 0,\ \ r\sin\theta\geq 0\right\}$$

$$=\left\{(r,\theta)\middle|0\leq r\leq 4,\ \ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$

$J=r$

$$\iint_D\sqrt{16-x^2-y^2}\,dxdy=\iint_E r\sqrt{16-r^2}\,drd\theta=\int_0^4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{16-r^2}\,d\theta\right)dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^4 r\sqrt{16-r^2}\,dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{3}(16-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 16^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{32}{3}\pi$$

(3)

極座標変換すると,

$$E=\left\{(r,\theta)\middle|1\leq r\leq 3,\ \ 0\leq\theta\leq 2\pi\right\}$$

$J=r$

$$\iint_D(2x^2+3y^2)\,dxdy=\iint_E r(2r^2\cos^2\theta+3r^2\sin^2\theta)\,drd\theta$$

$$=\iint_E r^3\left[(1+\cos 2\theta)+\frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)\right]drd\theta$$

$$=\int_1^3 r^3\left(\int_0^{2\pi}\left[(1+\cos 2\theta)+\frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)\right]d\theta\right)dr$$

$$=\int_1^3 r^3\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{3}{2}\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{2\pi}dr$$

$$=5\pi\int_1^3 r^3\,dr$$

$$=5\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_1^3$$

$$=\frac{5}{4}\pi\cdot 80$$

$$=100\pi$$

(4)

極座標変換すると，

$$E = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$\iint_D xye^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \iint_E r\cos\theta\, r\sin\theta\, e^{-r^2}\, rdrd\theta = \iint_E r^3 e^{-r^2} \cos\theta \sin\theta\, drd\theta$$

$$= \int_0^1 r^3 e^{-r^2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta\, d\theta \right) dr$$

$$= \int_0^1 r^3 e^{-r^2} \left[\frac{1}{2} \sin^2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 r^3 e^{-r^2}\, dr$$

ここで，$t = r^2$ とおくと，$dt = 2rdr$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 r^3 e^{-r^2}\, dr = \frac{1}{2} \int_0^1 te^{-t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{4} \left([-te^{-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{-t}\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{4} (-e^{-1} + [-e^{-t}]_0^1)$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{e} \right)$$

$$\int_0^1 xe^{-x}\, dx = 1 - \frac{2}{e}$$

はよく出てくるので，覚えておくと計算が格段に速くなります。

(5)

解法 1（速い解き方）

$$D = \left\{ (x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x,\ \ y \geq 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x, y) | (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0 \right\}$$

$$\begin{cases} x - 1 = r\cos\theta \\ \quad y = r\cos\theta \end{cases}$$

とおくと，

$J = r$

$$E = \left\{ (r, \theta) | 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi \right\}$$

となる。よって，

$$\iint_D 3y\,dxdy = \iint_E 3r\sin\theta\, rdrd\theta = 3\int_0^1 r^2\left(\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\right)dr$$

$$= 3\int_0^1 r^2[-\cos\theta]_0^\pi\, dr$$

$$= 3\cdot 2\int_0^1 r^2\, dr$$

$$= 3\cdot 2\cdot\frac{1}{3}$$

$$= 2$$

解法 2（応用が利く解き方（おすすめ））

いつも通りの極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

をすると，

$$E = \left\{(r,\theta) \mid r^2 \le 2r\cos\theta,\ \ r\sin\theta \ge 0\right\}$$

$\cos\theta \ge 0$ という条件は，一行前の $r^2 \le 2r\cos\theta$ に由来する。$r^2 \ge 0$ より，右辺もゼロ以上であるためである。この条件を考慮することを忘れないようにしましょう。

$$= \left\{(r,\theta) \mid r(r - 2\cos\theta) \le 0,\ \ \sin\theta \ge 0,\ \ \cos\theta \ge 0\right\}$$

$$= \left\{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 2\cos\theta,\ \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

となる。よって，

$$\iint_D 3y\,dxdy = \iint_E 3r\sin\theta\, rdrd\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\left(\int_0^{2\cos\theta} r^2\, dr\right)d\theta$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^3\theta\, d\theta$$

$$= 8\left[-\frac{1}{4}\cos^4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 8\cdot\frac{1}{4}$$

$$= 2$$

閉領域 D に記述される「$x^2+y^2 \leq 2x$」の「$2x$」がこの問題を難しくしている。この手の問題は上記のように 2 通りの解法が存在する。ひとつは，$2x$ を左辺に移項し，「二乗+二乗」の形に変形する方法であり，解法 2 に比べ計算が楽である。しかし，被積分関数によっては，この解法 1 では解けない問題が出てくる（p202 の A-3 (5)など）。そのため，どちらの方法でも解けるようにしておくことが望ましい。よって，解法 1 を試し，被積分関数に代入する際に，積分できればそのまま解法 1 を続行し，積分不可能だと判断すれば，解法 2 に移るのが最善である。

問 6.10　次の広義積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,\ D=\{(x,y)|0<x^2+y^2\leq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}}dxdy,\ D=\left\{(x,y)|x\geq 0,\ y\geq 0\right\},\ \alpha>0$

解

広義積分は，閉領域の一部が欠けていたりすることで，関数がその部分だけ定義できないことによって生じる積分である。しかしながら，計算の本質自体は今までと変わりはない。広義積分で登場する ε だけの使い方だけ覚えよう。

(1)

積分は“有界”な閉領域でしか計算できないため，与えられた閉領域 D を，ε を使って，無理やり有界にしてやることを考える。有界とは文字通り，境界が存在することを意味する。今回の問題は，$x^2+y^2=0$ は除かれている（$x^2+y^2=0$ のとき，被積分関数が定義できないからである）。

まず，$0<\varepsilon<1$ である ε を用意し，

$\tilde{D}=\{(x,y)|\varepsilon^2\leq x^2+y^2\leq 1\}$

と新たな有界な閉領域を定義する。流れとしては，初めは ε を残したまま，計算を進め，最後に，$\varepsilon\to+0$ としていく。

つまり，

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\iint_{\tilde{D}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy\right)$$

ということである。ここからは，いつも通り計算する。

極座標変換すると，

$$E=\left\{(r,\theta)|\varepsilon\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\right\}$$

である。よって，

$$\iint_{\tilde{D}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_E \frac{1}{r}rdrd\theta=\int_\varepsilon^1\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)dr$$

$$=2\pi\int_\varepsilon^1 dr$$

$$=2\pi(1-\varepsilon)$$

よって，求めたい積分は，

$\lim_{\varepsilon \to +0} 2\pi(1-\varepsilon) = 2\pi$

(2)

被積分関数にx^2+y^2があるので，極座標変換をしたいと考える。となれば，閉領域にもx^2+y^2に関する情報が必要であるため，自分で作る。（もともとの閉領域は第一象限全体を表している。）

$$\tilde{D} = \left\{(x, y) \middle| 0 \leq x^2+y^2 \leq \varepsilon^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

そして，最終的に，$\varepsilon \to \infty$ とすればよい。

極座標変換すると，

$$E = \left\{(r, \theta) \middle| 0 \leq r \leq \varepsilon,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

であるから，

$$\iint_{\tilde{D}} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha} dxdy = \iint_E \frac{r}{(1+r^2)^\alpha} drd\theta$$

$$= \int_0^\varepsilon \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{(1+r^2)^\alpha} d\theta\right) dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\varepsilon \frac{r}{(1+r^2)^\alpha} dr$$

ここで，$\alpha = 1$ のとき，

$$\frac{\pi}{2} \int_0^\varepsilon \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2}\log(1+r^2)\right]_0^\varepsilon = \frac{\pi}{4}\log(1+\varepsilon^2)$$

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \left(\frac{\pi}{4}\log(1+\varepsilon^2)\right) = \infty$$

次に，$\alpha \neq 1$ のとき，

$$\frac{\pi}{2} \int_0^\varepsilon \frac{r}{(1+r^2)^\alpha} dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{(1+r^2)^{\alpha-1}}\right]_0^\varepsilon$$

$$= \frac{\pi}{4(1-\alpha)} \left(\frac{1}{(1+\varepsilon^2)^{\alpha-1}} - 1\right)$$

ここで，$\varepsilon \to \infty$ とすると，

・$\alpha - 1 > 0 \quad \therefore \alpha > 1$ のとき，

$$\frac{\pi}{4(1-\alpha)}(0-1) = \frac{\pi}{4(\alpha-1)}$$

・$\alpha - 1 < 0 \quad \therefore \alpha < 1$ のとき，

$$\infty$$

となる。

以上をまとめると，

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy = \begin{cases} \infty, & \alpha \leq 1 \\ \dfrac{\pi}{4(\alpha-1)}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

問 6.11　次の 3 重積分を計算せよ。

(1) $\iiint_{\Omega} (x + yz)\, dxdydz$,　$\Omega = \left\{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq 1,\ \ 0 \leq z \leq xy\right\}$

(2) $\iiint_{\Omega} (2x^2 - y^2 z)\, dxdydz$,　$\Omega = \left\{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 1,\ \ 0 \leq z \leq 1\right\}$

解

(1)

xy ー平面への正射影 D は,

$D = \left\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq 1\right\}$

であるから,

$$\iiint_{\Omega} (x + yz)\, dxdydz = \iint_D (\int_0^{xy} (x + yz) dz)\, dxdy = \iint_D \left[xz + \frac{1}{2} yz^2\right]_{z=0}^{z=xy} dxdy$$

$$= \iint_D \left(x^2 y + \frac{1}{2} x^2 y^3\right) dxdy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{2} x^2 y^3\right) dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{8} x^2 y^4\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{8} x^2\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{24}$$

(2)

xy ー平面への正射影 D は,

$D = \{(x, y) | 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$

であるから,

$$\iiint_{\Omega} (2x^2 - y^2 z)\, dxdydz = \iint_D \left(\int_0^1 (2x^2 - y^2 z)\, dz\right) dxdy$$

$$= \iint_D \left[2x^2 z - \frac{1}{2} y^2 z^2\right]_0^1 dxdy$$

$$\iint_D \left(2x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) dxdy$$

ここで，極座標変換すると，

$$E = \left\{(r, \theta) \middle| 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

であるから，

$$\iint_D \left(2x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) dxdy = \iint_E \left(2r^2\cos^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\right) r dr d\theta$$

$$= \int_0^1 r^3 \left(\int_0^{2\pi} \left(1 + \cos 2\theta - \frac{1}{4}(1 - \cos 2\theta)\right) d\theta\right) dr$$

$$= \int_0^1 r^3 \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{8}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} dr$$

$$= \frac{3}{2}\pi \int_0^1 r^3\, dr$$

$$= \frac{3}{2}\pi \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{8}\pi$$

問 6.12　次の 3 重積分を計算せよ。

(1) $\iiint_{\Omega} xy\,dxdydz$,

Ωは平面 $z=0$ と $z=1$, $z=x$ と $z=x+1$, $z=y$ と $z=y+1$ で囲まれた部分

(2) $\iiint_{\Omega} z\,dxdydz$, $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ z\ge 0\right\}$

解

$z=0$ と $z=1$ に囲まれているから，$z=w$ とおくと，

$0\le z\le 1 \rightarrow 0\le w\le 1$

$z=x$ と $z=x+1 \rightarrow z-x=0$ と $z-x=1$ に囲まれているから，$z-x=u$ とおくと，

$0\le u\le 1$

同様に，$z-y=v$ とおくと，

$0\le v\le 1$

このとき，

$$\begin{cases} x=w-u \\ y=w-v \\ z=w \end{cases}$$

ヤコビアン J は

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$\tilde{\Omega}=\left\{(u,v,w)\middle|0\le u\le 1,\ 0\le v\le 1,\ 0\le w\le 1\right\}$$

であるから，

$$\iiint_{\Omega} xy\,dxdydz=\iiint_{\tilde{\Omega}}(w-u)(w-v)\,dudvdw$$

$$=\iiint_{\tilde{\Omega}}\left[w^2-(u+v)w+uv\right]dudvdw$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^1\left[w^2-(u+v)w+uv\right]dw\right)dv\right)du$$

$$\int_0^1\left(\int_0^1\left[\frac{1}{3}w^3-\frac{1}{2}(u+v)w^2+uvw\right]_{w=0}^{w=1}dv\right)du$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(u+v)+uv\right)dv\right)du$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{3}v-\frac{1}{2}uv-\frac{1}{4}v^2+\frac{1}{2}uv^2\right]_0^1du$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}u\right)du$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{12}$$

3 重積分における θ の最大範囲は $0\leq\theta\leq\pi$ である。それと、問題条件の共通範囲をとる。

(2)

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$$

と、極座標変換すると,

$$W=\left\{(r,\theta,\phi)\mid 1\leq r\leq 2,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq\phi\leq 2\pi\right\}$$

また、ヤコビアン J は,

3 重積分におけるヤコビアンは $r^2\sin\theta$ になることを必ず覚えておきましょう。

$$J=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}=r^2\sin\theta$$

となるから,

$$\iiint_\Omega z\,dxdydz=\iiint_W r\cos\theta\,(r^2\sin\theta)drd\theta d\phi$$

$$=\int_1^2 r^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\left(\int_0^{2\pi}d\phi\right)d\theta\right)dr$$

$$=2\pi\int_1^2 r^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right)dr$$

$$=2\pi\int_1^2 r^3\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}dr$$

$$=\pi\int_1^2 r^3\,dr$$

$$=\frac{15}{4}\pi$$

問 6.13　次の 2 重積分によって計算せよ。

(1)半径 a の球の体積

(2)$z = x^2 + y^2$ と xy 平面，yz 平面，zx 平面，および $x = 1$，$y = 1$ で囲まれた部分の体積

(3)$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ の，$z = x^2 + y^2$ より上方にある部分の体積

解

立体の体積問題は，3 次元の図をいかにイメージできるかがカギである。しかしながら，出題される図形の種類は限られてくるため，これから出現する図形の形を覚えておくとよい。

(1)

半径 a の球の内部を表す方程式は，

$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

と表される。

この図形の xy 平面への正射影 D は，$z = 0$ を代入して

$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$

また，

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

を変形して，

$z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

となるが，球の対称性より，

$z = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

のみを考え（球を xy 平面で切った時の上半分），最後に 2 倍することを考える

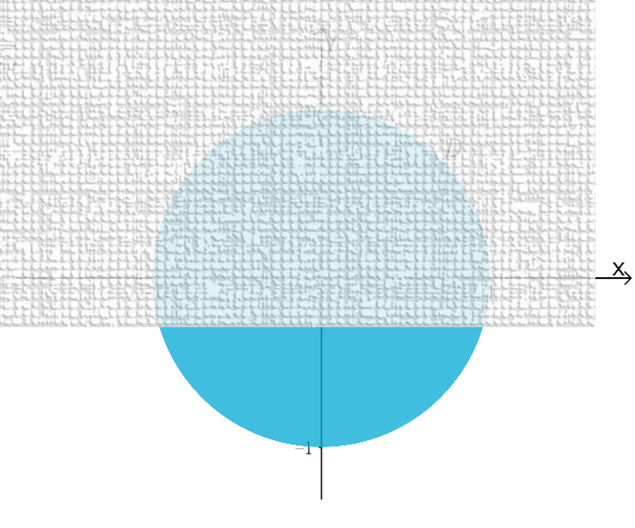
求める体積 V は，

$V = 2\iint_D \left(\int_0^z dz\right) dxdy = 2\iint_D z\, dxdy = 2\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 \cdots}$

ここからはいつも通り解く。極座標を導入して，

$E = \left\{(r, \theta) | 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\},\ J = r$

より，



$$2\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy = 2\iint_E \sqrt{a^2-r^2}\,r\,drd\theta$$

$$= 2\int_0^a\left(\int_0^{2\pi} r\sqrt{a^2-r^2}\,d\theta\right)dr$$

$$= 4\pi\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr$$

$$= 4\pi\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3$$

(2)

「xy平面，yz平面，zx平面，および $x=1$，$y=1$ で囲まれた部分」は，

「$z=0$，$x=0$，$y=0$，$x=1$，$y=1$で囲まれた部分」である。

この部分の正射影 D は，

$$D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\right\}$$

であるから，

$$V=\iint_D\left(\int_0^z dz\right)dxdy=\iint_D z\,dxdy=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$$

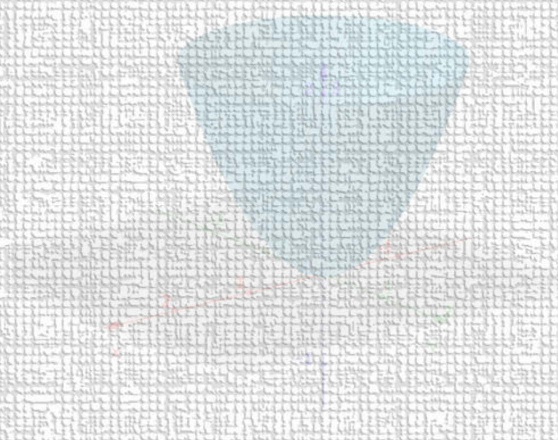
$$=\int_0^1\left(\int_0^1 (x^2+y^2)\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 dx$$

$$=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x\right]_0^1$$

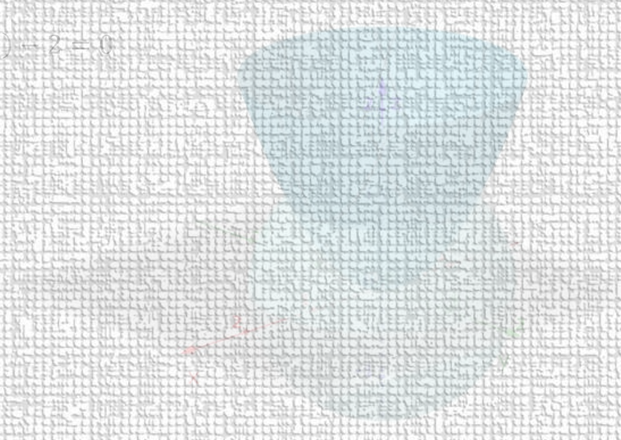
$$=\frac{2}{3}$$



(3)

まず，$x^2+y^2+z^2=2$ より，$z=\pm\sqrt{2-x^2-y^2}$ であるが，$z=x^2+y^2$ の上方であるから，
$z=+\sqrt{2-x^2-y^2}$ のみでよい。

$z=+\sqrt{2-x^2-y^2}$ と $z=x^2+y^2$ から z を消去して，



$$\sqrt{2-x^2-y^2}=x^2+y^2 \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)-2=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-1)(x^2+y^2+2)=0$$

$x^2+y^2 \geq 0$ より，

$x^2+y^2=1$

が得られる。

よって，共通部分の正射影 D は，

$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$

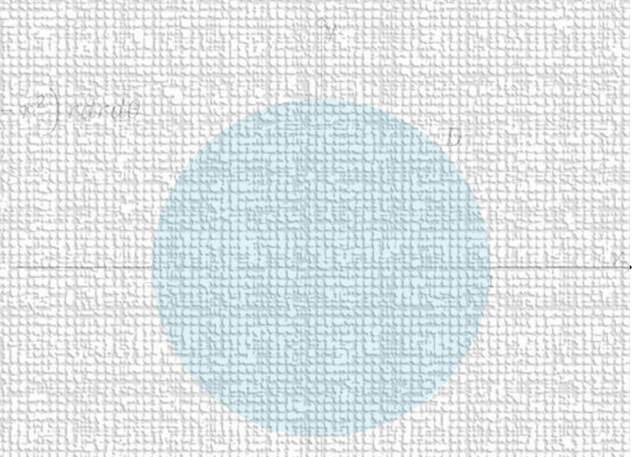
となる。よって，

$$V=\iint_D\left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}dz\right)dxdy=\iint_D\left(\sqrt{2-x^2-y^2}-x^2-y^2\right)dxdy$$

ここで，極座標変換すると，

$$\mathrm{E}=\left\{(r,\theta)\middle|0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\right\},\ J=r$$

であるから，



$$\iint_D\left(\sqrt{2-x^2-y^2}-x^2-y^2\right)dxdy=\iint_E\left(\sqrt{2-r^2}-r^2\right)rdrd\theta$$
$$=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(r\sqrt{2-r^2}-r^3\right)d\theta\right)dr$$
$$=2\pi\int_0^1\left(r\sqrt{2-r^2}-r^3\right)dr$$
$$=2\pi\left[-\frac{1}{3}(2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}r^4\right]_0^1$$
$$=2\pi\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$
$$\frac{\pi}{6}(8\sqrt{2}-7)$$

問 6.14 次の曲面積を求めよ。

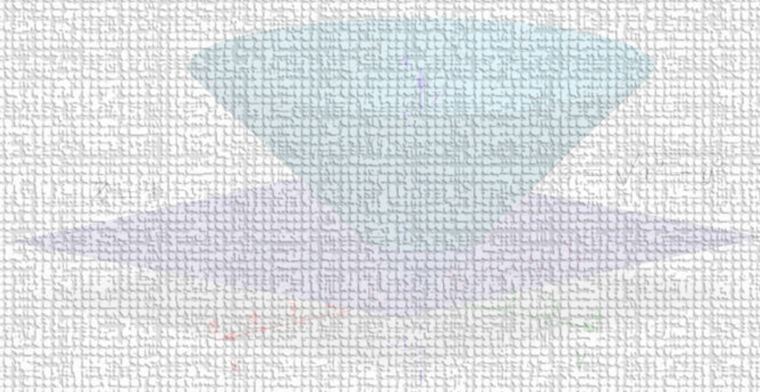
(1) 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ の平面 $z=1$ より下方にある部分

(2) 曲面 $z=1-x^2-y^2$ の xy 平面より上方にある部分

解

まず，与えられた部分の正射影 D を考える。

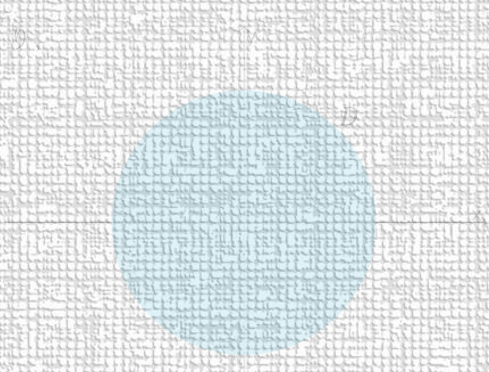
曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ を図示すると以下のようになる。



これを上から覗くと，正射影 D が得られる。つまり，

$D=\{(x,y)|0\leq x^2+y^2\leq 1\}$

である。



ここで，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

であるから，

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$$

よって，

$$m(S)=\iint_D \sqrt{2}\,dxdy$$

ここで，極座標変換すると，

$E = \left\{ (r, \theta) \middle| 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi \right\},\ J = r$

であるから，

$$m(S) = \iint_D \sqrt{2}\, dxdy = \sqrt{2} \iint_E r\, drd\theta = \sqrt{2} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r\, d\theta \right) dr$$

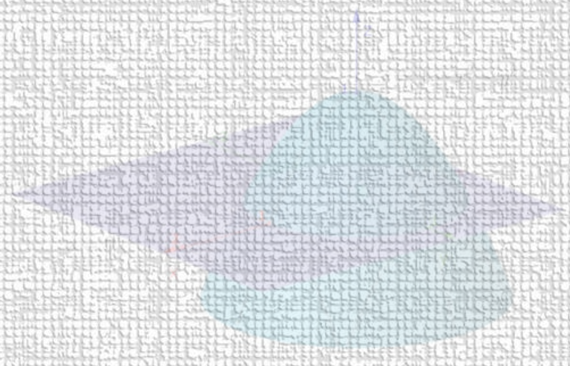
$$= 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 r\, dr$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{2}\pi$$

(2)

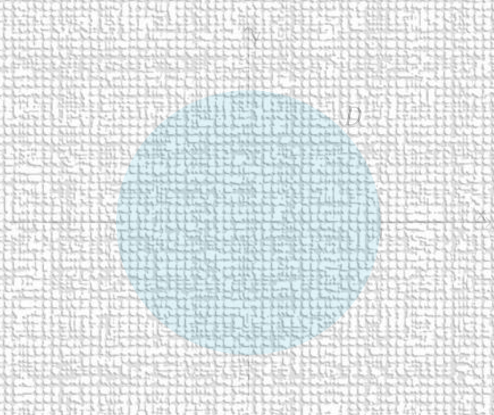
$z = 1 - x^2 - y^2$ を図示すると，以下のようになる。



この図形を上から覗くと，正射影 D がわかり，

$D = \{(x, y) | 0 \le x^2 + y^2 \le 1\}$

である。ここで，



$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

であるから，

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$$

よって，

$$m(S) = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy$$

ここで，極座標変換すると，

$$E = \left\{ (r, \theta) \middle| 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\},\ J = r$$

であるから，

$$m(S) = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy = \iint_E \sqrt{1 + 4r^2}\, r dr d\theta$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r\sqrt{1 + 4r^2}\, d\theta \right) dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1)$$

$$= \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$$